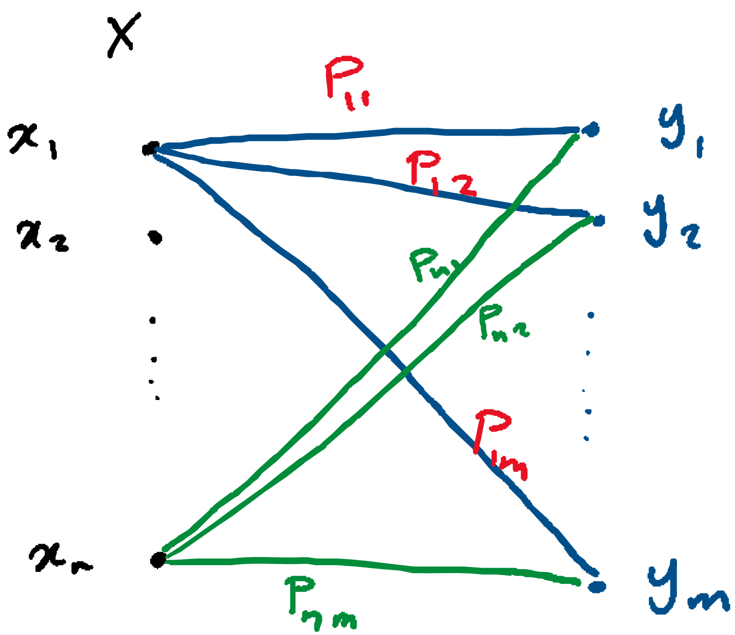
به نام زندگی

ظرفیت کانال

در این بخش می خواهیم ظرفیت کانال های متقارن را بررسی کنیم. برای این منظور مشخصه کانال یعنی $p(y|x)$ به صورت یک ماتریس گذار تعریف می شود.



$$P(Y=y_j \mid X=x_i) = P_{ij}$$

$$\sum_j P_{ij} = 1 \quad , \forall i$$

با توجه به اینکه توابع احتمال، نرمالیزه هستند.

$$
P = \begin{array}{c|cccc|}
{}_{x} \backslash {}^{y} & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\
\hline
x_1 & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\
x_2 & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\
\vdots & \vdots & & & \\
x_n & P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nm}
\end{array}
= \left[P_{ij} \right]_{n \times m}
$$

• اولین شرط تقارن برای این مدل کانال ها، این است که تعداد ورودی ها، خروجی های کانال باهم برابر باشند یعنی

$|X| = |Y|$ یا $n = m$

• با توجه به نرمالیزه بودن توابع احتمال، می دانیم که

$$\sum_j P_{ij} = 1 \quad \forall i$$

۵) مجموع عناصر روی یک سطر ماتریس P همواره برابر یک است!

* دومین شرط تقارن این است که سطرهای ماتریس P جایگشت یکدیگر باشند.

* سومین شرط تقارن این است که ستون های ماتریس P جایگشت یکدیگر باشند.

در ادامه با درنظر گرفتن این شرایط، می خواهیم ظرفیت کانال های متقارن را بررسی کنیم.

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left(H(Y) - H(Y|X) \right)$$

$$H(y|X) = E_{p(x)}\{H(y|X=x)\}$$

از طرف دیگر

$$H(y|X=x) = ?$$

آنتروپی یکی از سطرهای ماتریس P

$H(y|X=x_1) = H(P_{11}, P_{12}, \ldots, P_{1m}) = H($سطر اول ماتریس P$) = H(\underline{r})$

$H(y|X=x_2) = H(P_{21}, P_{22}, \ldots, P_{2m}) = H($سطر دوم ماتریس P$) = H(\underline{r})$

$\vdots$

$H(y|X=x_n) = H(P_{n1}, P_{n2}, \ldots, P_{nm}) = H($سطر nام ماتریس P$) = H(\underline{r})$

سطرهای ماتریس P جایگشت یکدیگر هستند

$$\Longrightarrow \quad H(y|x) = E_{p(x)}\{H(y|x=x)\} = E_{p(x)}\{H(\underline{r})\}$$

$$\Longrightarrow \quad H(y|x) = H(\underline{r})$$

$$\Longrightarrow \quad C = \max_{p(x)}\Big(H(y) - \overbrace{H(y|x)}^{H(\underline{r})}\Big) = \max_{p(x)} H(y) - H(\underline{r})$$

برای به دست آوردن ظرفیت کانال لازم است ماکزیمم $H(y)$ را به ازای توزیع های مختلف x به دست بیاوریم. می دانیم که به دلیل تقارن مسئله، توزیع یکنواخت x به توزیع یکنواخت y منجر می شود که $H(y)$ را ماکزیمم می کند.

$$X \text{ توزیع یکنواخت} \xrightarrow[\text{متقارن}]{} Y \text{ توزیع یکنواخت} \Longrightarrow H(Y)\big|_{max} = \log |Y|$$

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = \frac{1}{|X|} \qquad P_{y_1} = P_{y_2} = \cdots = P_{y_m} = \frac{1}{|Y|}$$

$$\Longrightarrow \boxed{C = H(Y)\big|_{max} - H(\underline{r}) = \log |Y| - H(\underline{r})}$$

رابطه‌ی ظرفیت برای کانال‌های متقارن

همان طور که دیدیم در روند محاسبه ی ظرفیت کانال های متقارن، از اینکه تعداد ورودی ها و تعداد خروجی های کانال یکسان هستند و اینکه ستون ها جایگشت یکدیگر هستند، به طور مستقیم استفاده ای نکردیم. بنابراین می توانیم نتیجه گیری کنیم که برای این مدل کانال می توان یک حالت تقارن ضعیف نیز تعریف کرد. در این حالت نیز از رابطه ی ظرفیت کانال های متقارن برای محاسبه ی ظرفیت استفاده کرد.

برای این منظور (به دست آوردن شرط تقارن ضعیف) محاسبه ی $P(Y)$ به ما کمک می کند.

$$P(y_1) = P_r\{Y = y_1\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \underbrace{P_r\{Y = y_1 \mid X = x_i\}}_{P_{i1}}$$

قضیه احتمال کلی

$$P(y_2) = P_r\{Y = y_2\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \underbrace{P_r\{Y = y_2 \mid X = x_i\}}_{P_{i2}}$$

$$\vdots$$

$$P(y_j) = P_r\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \underbrace{P_r\{Y = y_j \mid X = x_i\}}_{P_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} P_i P_{ij}$$

$$\vdots$$

$$P(y_m) = P_r\{Y = y_m\} = \sum_{i=1}^{n} P_i \underbrace{P_r\{Y = y_m \mid X = x_i\}}_{P_{im}}$$

به دلیل تقارن مسئله، توزیع یکنواخت x به توزیع یکنواخت y منجر می‌شود، در نتیجه خواهیم داشت.

$$\xrightarrow{\text{توزیع یکنواخت } x} \quad P_r\{Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P_i}_{\frac{1}{|X|}} P_{ij} = \frac{1}{|X|} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_{ij}}_{\text{حاصلجمع عناصر یک ستون از ماتریس } P}$$

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{|X|}$$

هر $\quad P_{y_1} = P_{y_2} = \dots = P_{y_m} = \frac{1}{|X|} \quad$ در نتیجه حاصلجمع عناصر ستون‌های

ماتریس P باید همواره برابر یک مقدار ثابت c باشد

$$\Longrightarrow P_r\{Y=y_j\} = \frac{1}{|X|}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_{ij}}_{c} = \frac{c}{|X|} = \frac{1}{|Y|}$$

$\Longleftarrow$ $c = \frac{|X|}{|Y|}$ که برای کانال های متقارن داریم $c = 1$

شرط تقارن ضعیف $\Longleftarrow$

۱- سطرها جایگشت یکدیگر باشند

۲- حاصلجمع عناصر ستون های ماتریس P باهم برابر باشند

$$\xrightarrow[\text{تقارن ضعیف}]{\text{شرط تقارن یا}} \quad \boxed{C = \log|Y| - H(\underline{r})}$$

تمرین - برای کانال های زیر ، مشخص کنید که آیا شرط متقارن یا متقارن ضعیف برقرار است یا
خیر و ظرفیت کانال را به دست بیاورید

1) $[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \longrightarrow$ متقارن

2) $[P_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow$ متقارن ضعیف

3) $[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-P_e & P_e \\ P_e & 1-P_e \end{bmatrix}$ متقارن (BSC)

4) $[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-P_{e_1} & P_{e_1} \\ P_{e_2} & 1-P_{e_2} \end{bmatrix}$ نه تقارن دارد و نه تقارن ضعیف

5) $[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$ تقارن دارد و نه تقارن ضعیف

(BEC)

$C = \operatorname{Max} I(X;Y)$

* برخی خصوصیات ظرفیت کانال

1) $C \geqslant 0$

ظرفیت کانال همواره غیرمنفی است

$C = \operatorname{Max} I(X;Y) \geqslant 0 \Leftarrow I(X;Y) \geqslant 0$ زیرا

2) $C \leqslant \operatorname{Max} H(Y) = \log |\mathcal{Y}|$

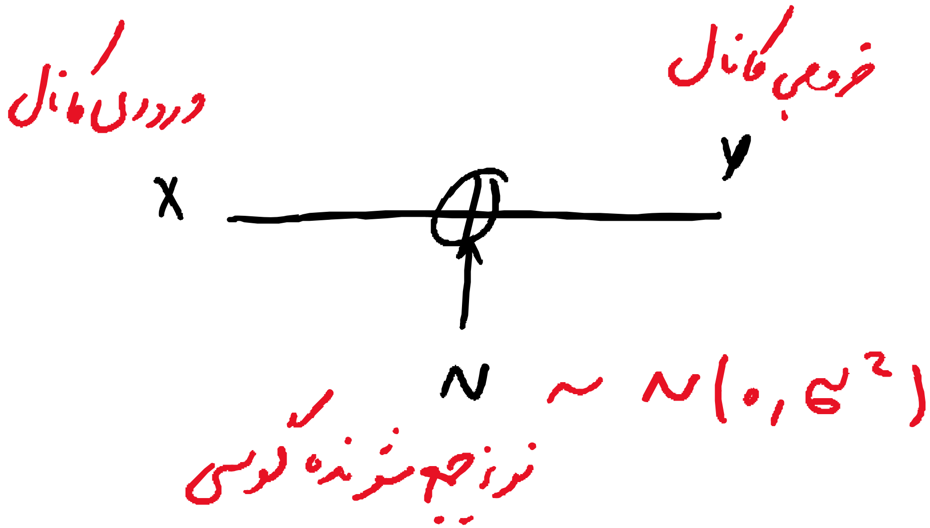
3) $C \leqslant \operatorname{Max} H(X) = \log |X|$

$I(X;Y) = \underline{H(Y)} - H(Y|X)$

$I(X;Y) = \underline{H(X)} - H(X|Y)$

$C = \operatorname{Max} I(X;Y)$

همان طور که گفتیم، در این درس تمرکز ما بر روی کانال های گسسته است، اما یک کانال پیوسته ی پرکاربرد را نیز می خواهیم معرفی کنیم. این کانال را کانال جمع شونده ی گوسی (کانال گوسی) می گوییم که مدل آن به صورت زیر است.



$N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$X \in \mathbb{R}$

$Y \in \mathbb{R}$

می‌خواهیم رابطه‌ی ظرفیت این کانال را بیان کنیم (وارد جزئیات محاسبه‌ی تئوری ظرفیت کانال گوسی نمی‌شویم)

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$ (مسئله ظرفیت)

subject to Power Constraint P

$$E X^2 \leq P$$

$$\xrightarrow[\text{کانال گوسی}]{\text{حل مسئله ظرفیت}} \quad C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right) \text{ bits/transmition}$$

$\sigma^2 = N$

از طرف دیگر می‌دانیم که هر سیستمی دارای یک پهنای باند مشخص W است. اگر ارسال اطلاعات را در این پهنای باند مشخص در نظر بگیریم و چگالی طیف توان نویز را برابر $\frac{N_0}{2}$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت.

$$\text{قدرت نویز} = \frac{N_0}{2} \times W \times 2 = N_0 W = N$$

$$\xrightarrow[W\ \text{پهنای باند}]{C} \quad C = \frac{1}{2} \times (2W) \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \ \text{bit/s}$$

SNR

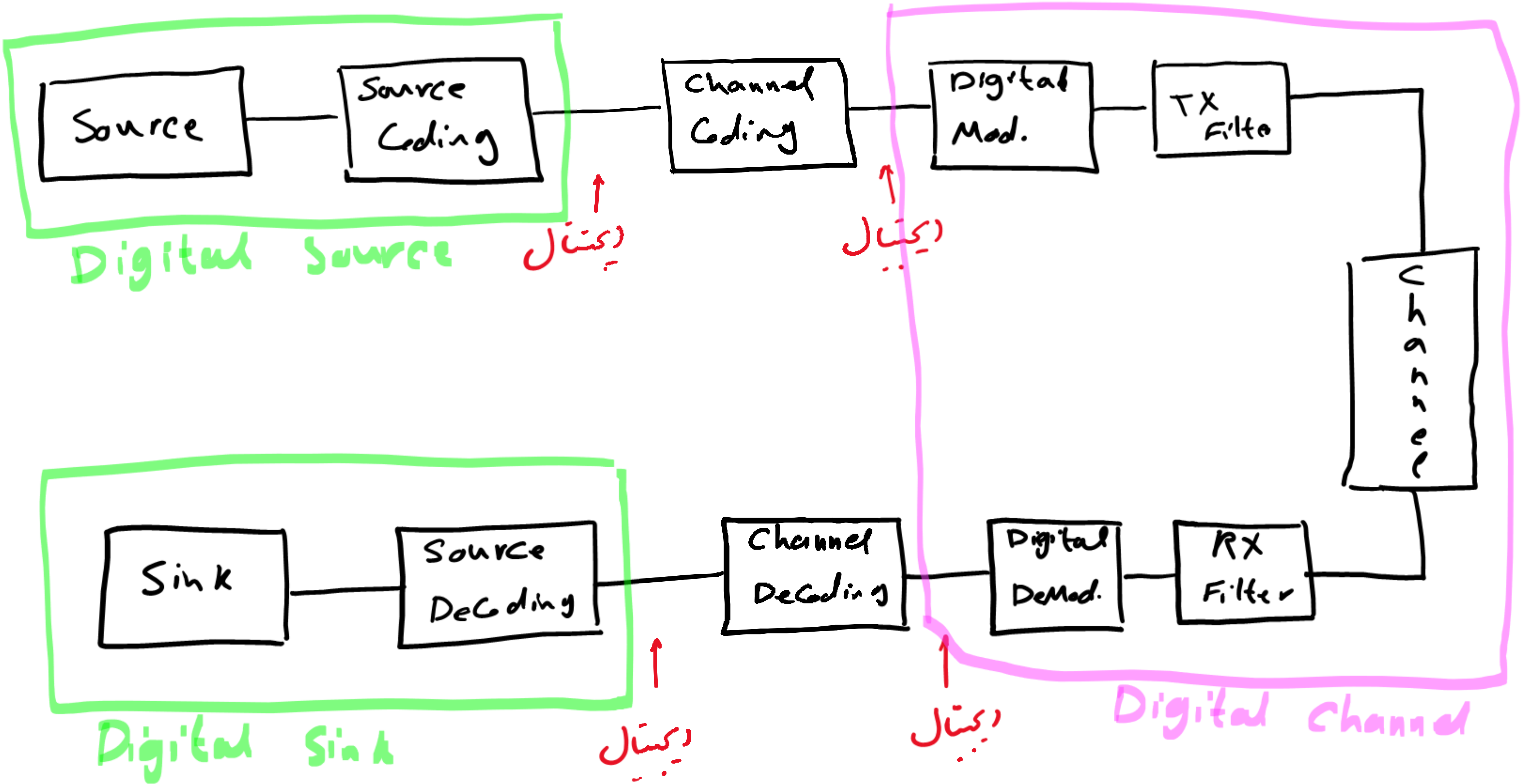
Singnal to Noise Power Ratio

$$\Longrightarrow C = W \log(1 + SNR)$$

* کدینگ کانال Channel Coding

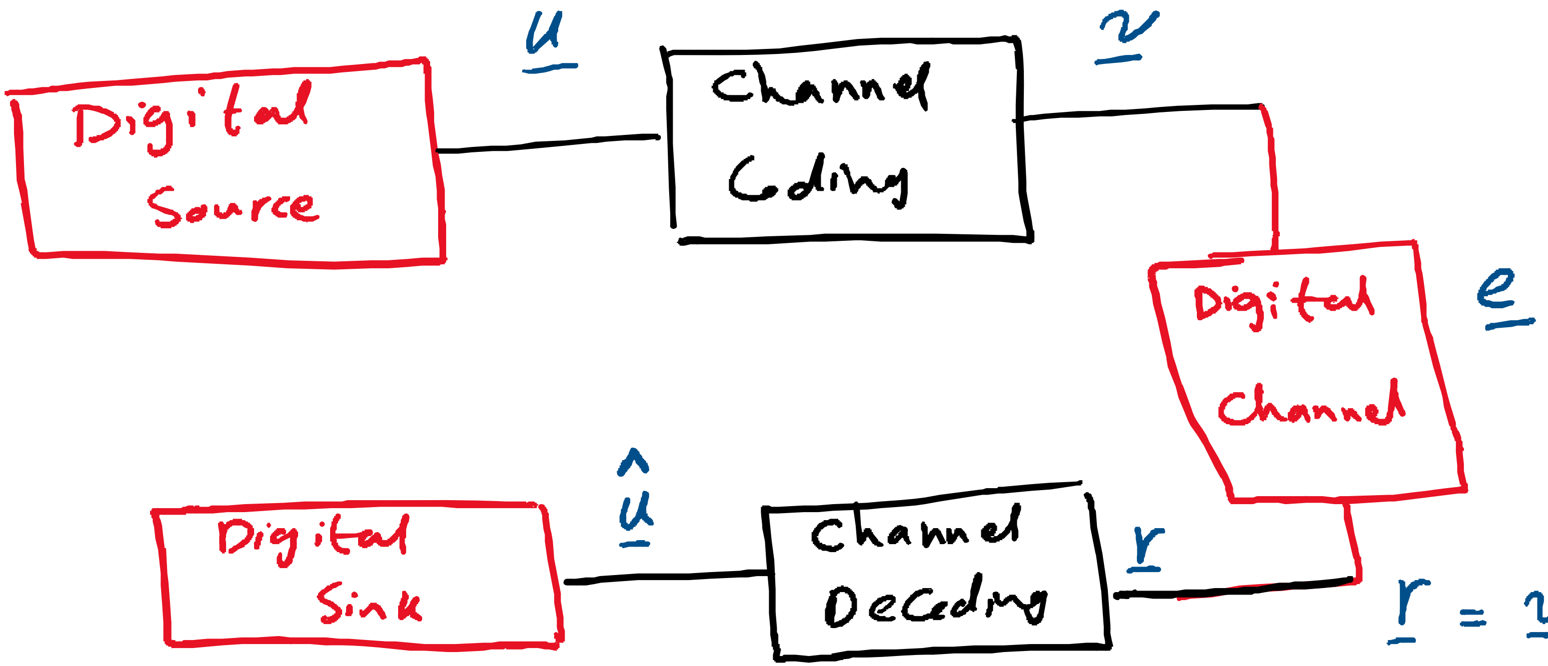
براساس قضیه شانون، می‌دانیم که اگر اطلاعات را با نرخی کمتر از ظرفیت کانال از سمت فرستنده به سمت گیرنده بفرستیم، می‌توانیم اطلاعات را با خطای به میزان دلخواه کم بازیابی کنیم. اما برای رسیدن به این منظور لازم است یک تصویرسازی از فضای سیگنال به یک فضای دیگر (که به آن مجموعه نوعی می‌گوییم) انجام شود. مطالعاتی که بر روی این عملیات تصویرسازی انجام شد، منجر به تئوری کدگذاری کانال (Channel Coding) شد.

به طور خلاصه در کدگذاری کانال، در سمت فرستنده یک سری اضافات کنترل شده (redundant)
به اطلاعات ارسالی افزوده می‌شود. در گیرنده در طبقه کدبردار کانال از این اضافات برای
تشخیص و تصحیح خطا استفاده می‌کنیم. به این ترتیب سمت از مبنای یا بدستم را
به بیت‌های redundant اختصاص می‌دهیم در نتیجه نرخ ارسال اطلاعات کاهش می‌یابد اما
در عوض قابلیت اطمینان سیستم بالا می‌رود و خطای بازیابی اطلاعات کاهش پیدا می‌کند.
در طراحی کدهای کانال به این موضوع توجه می‌کنیم که می‌خواهیم به بالاترین نرخ ممکن با پیچیدگی
قابل قبول برسیم.



Source
Source Coding
Channel Coding
Digital Mod.
TX Filter
Channel
Sink
Source Decoding
Channel Decoding
Digital DeMod.
RX Filter
Digital Source
Digital Sink
Digital Channel
دیجیتال
دیجیتال
دیجیتال
دیجیتال

با توجه به اینکه ورودی و خروجی بلوک های انکودر و دیکودر کانال، دیجیتال هستند، می توانیم با مدل سازی بلوک های قبلی و بعدی ساختار سیستم های مخابراتی به صورت بلوک های دیجیتال یک مدل ساده برای بررسی کدینگ و دیکدینگ کانال به صورت زیر معرفی کنیم.



$$\underline{r} = \underline{v} + \underline{e}$$

بر اساس مدل بالا، اطلاعات ارسالی $\underline{u}$ یا بردارهای شامل بیت‌های اطلاعات ارسالی است که
وارد بلوک کدگذاری کانال می‌شوند. در بلوک کد کننده کانال، بیت‌های کنترل شده‌ای به این
بردار اطلاعات افزوده می‌شود و بردار کد شده‌ی $\underline{v}$ را تشکیل می‌دهد. بردار اطلاعات
کد شده‌ی $\underline{v}$ وارد کانال دیجیتال می‌شود. می‌دانیم که اطلاعات ارسالی در عبور از کانال‌های
مخابراتی، با خرابی‌هایی مواجه هستند. این خرابی‌ها در کانال دیجیتال به صورت یک بردار
خطا $\underline{e}$ قابل مدل‌سازی است. بنابراین در گیرنده بردار دریافتی $\underline{r}$ را می‌توان
به صورت $\underline{r} = \underline{v} + \underline{e}$ در نظر گرفت. بردار $\underline{r}$ وارد بلوک دیکدر کانال می‌شود.

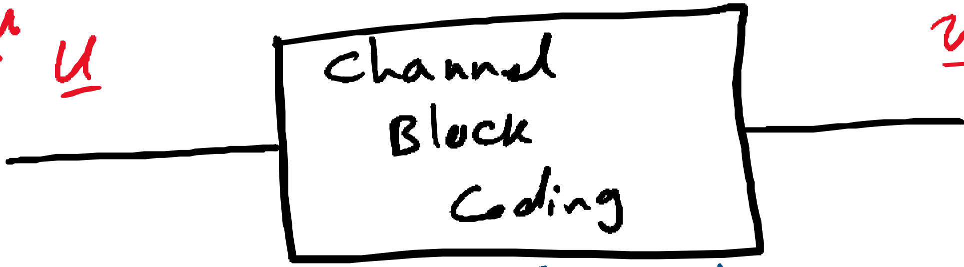
اگر کدگذار کانال با استفاده از اضافات کنترل شده و الگوریتم‌های مناسب دیکدینگ، خطاهای رخ‌داده در کانال را تا جایی که قابلیت تشخیص و تصحیح آن را دارد، تشخیص می‌دهد و اصلاح می‌کند. به این ترتیب به بردار اطلاعات بازیابی شده $\hat{u}$ می‌رسیم که ممکن است دقیقاً با بردار اطلاعات ارسالی u یکسان نباشد و خطاهایی در بازیابی اطلاعات وجود داشته باشد. اما این خطا به میزان دلخواه کم خواهد بود (هدف طراحی کدینگ) هنر کدینگ کانال این است که بتوانیم در ماکزیمم نرخ ممکن، به کمترین خطا در بازیابی و پیچیدگی قابل قبول برسیم.

در تئوری کدینگ کانال، کدهای کانال مختلفی با ساختارهای جبری متفاوت مطرح شده‌اند.
در این درس ما بر روی کدهای بلوکی که ساختار در تئوری ساده‌ای دارند متمرکز می‌شویم.
در کدهای بلوکی، اطلاعات ارسالی به بلوک‌هایی به طول k تقسیم‌بندی می‌شوند که
به آنها بلوک‌های پیام می‌گوییم. عملیات کدینگ کانال بلوکی معادل اضافه کردن
n-k بیت یا سمبل Redundant بر پایه‌ی الگوریتم کدینگ است که در نتیجه‌ی آن
یک بلوک کد به طول n در خروجی انکدر کانال ساخته می‌شود.

یک بردار پیام
بلوک پیام

$\underline{u}$

Message word



$\underline{v}$

کلمه کد یا بردار کد

Code word

red. بیت یا سمبل $(n-k)$

$n \geq k$

$\underline{v} = (v_0, v_1, .., v_{n-1})$

$\underline{u} = (u_0, u_1, ..., u_{k-1})$

$n =$ طول بردار کد

$k =$ طول بردار پیام

$\Longrightarrow$ نرخ کد $=$ تعداد بیت های اطلاعات ارسالی / کل تعداد بیت های ارسالی سوی کانال $= \dfrac{k}{n} < 1$

کلمه‌ی کد $\underline{v}$ از کانال دیجیتال عبور می‌کند و در کانال یک بردار خطا (الگوی خطا) $\underline{e}$ با کلمه کد جمع می‌شود تا خطاهای رخ داده در کانال را مدل‌سازی کند.

$$\underline{r} = \underline{v} + \underline{e}$$

$\underline{r}$: بردار دریافتی در مقصد

$\underline{v}$: کلمه کد ارسالی

$\underline{e}$: بردار خطا

$$\underline{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$$

$$\underline{e} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$$

به طور کلی هر مؤلفه‌ای از بردار $\underline{e}$ که غیر صفر باشد، نشان دهنده رخ دادن خطا در آن مکان است.

$e_i \neq 0 \longrightarrow$ در مکان iام بردار یک خطا رخ داده است

$\underline{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1})$ و $\underline{r} = \underline{v} + \underline{e}$ یا $r_i = v_i + e_i$

اگر در حالت باینری باشیم، غیر صفر بودن e_i به معنی این است که $e_i = 1$

بنابراین می‌توان گفت که در حالت باینری $e_i = 1$ نشان دهنده رخ دادن خطا

در مکان i ام کلمه کد ارسالی $\underline{v}$ است.

مثال: اگر داشته باشیم

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \underline{e} & = & (0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0) \end{array}$$

مکان سوم خطا رخ داده

مکان‌های 6, 7 خطا رخ داده

* توجه داشته باشیم که در حالت باینری $\underline{v} + \underline{e}$ معادل جمع باینری عناصر بردارهای $\underline{v}$ و $\underline{e}$ است

$$\begin{cases} 0+1=1 \\ 1+1=0 \end{cases} \qquad (\text{bitwise XOR} \equiv +)$$

دیکدر با دریافت بردار $\underline{r}$ و با استفاده از بیت‌های red. ، الگوریتم‌های مناسب دیکدینگ سعی می‌کند که خطاهای رخ داده در کانال را تا حد ممکن (تا حد قابلیت تشخیص و تصحیح خطا) تشخیص و حذف و اصلاح کند. به این ترتیب به بردار اطلاعات بازیابی شده $\hat{\underline{u}} = (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{k-1})$ خواهیم رسید.

می‌دانیم که همواره خطاهایی در بازیابی اطلاعات خواهیم داشت و ممکن است $\hat{\underline{u}}$ دقیقاً همان اطلاعات ارسالی $\underline{u}$ نباشد و در مواقعی خطای بازیابی داشته

باشیم ولی طراحی ها به گونه‌ای انجام می‌شود که این خطا به میزان دلخواه کم باشد.
(طراحی روشهای کدینگ و دیکدینگ کانال)

در ادامه‌ی سعی خواهیم با یک مثال ساده، مفهوم کدینگ و دیکدینگ کانال و قابلیت
تشخیص و تصحیح خطا را در کدهای بلوکی بیان کنیم.